Leçons :
103 : Conjugaison dans un grp. Ex. Tse ss grp. distingué et du grp. quotient. App.
108 : Ex. de parties génératrices d'un grp. App.
104 : Groupes finis. Ex / App.

DEV : Simplicité de SO(3)

Ref : [CVA]

Dev : on montre que $SO(3) := SO(3, \mathbb{R})$ est un groupe simple.

On suppose que $H \trianglelefteq SO(3)$ tq $H \neq \{id\}$ et on montre que $H = SO(3)$.

① On montre que tout élément de $SO(3)$ et $O(3)$-semblable à une matrice de la forme $R_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$

② On en déduit que $SO(3)$ est connexe par arcs

③ On fixe $h \in H \setminus \{id\}$, et on pose $\varphi : SO(3) \longrightarrow \mathbb{R}$, $g \mapsto \varphi(g) = tr(ghg^{-1}h^{-1})$

On montre que $\varphi(SO(3))$ est de la forme $[a, 3]$ où $a \leq 3$.

④ On montre que le centre de $SO(3)$ est réduit à l'identité, et on déduit que $a < 3$

⑤ On montre qu'il existe un entier n tel que : $a < 1 + 2\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) < 3$.
Soit g_n dans $SO(3)$ tel que : $\varphi(g_n) = 1 + 2\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$
et $h_n = g_n h g_n^{-1} h^{-1}$.
On montre que h_n^n est un retournement de H.

⑥ En utilisant le fait que $SO(3)$ est engendré par les retournements, on montre que $H = SO(3)$ et on conclut.

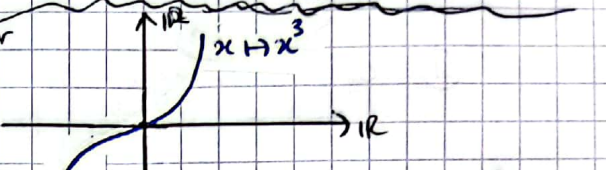
Scanné avec CamScanner

Preuve :

① On a pour tout $g \in SO(3)$ que ses valeurs propres sont nécessairement égales à 1 ou -1 (car $g \in O(3)$ en particulier et donc conserve la norme euclidienne)

Ensuite le polynôme caractéristique de g est un polynôme de degré 3 à coefficients dans $\mathbb{R}$. Il existe donc nécessairement une solution réelle qui est donc 1 ou -1.

Voir



Et tout polynôme : $ax^3+bx^2+cx+d \underset{x \to +\infty}{\sim} ax^3$

De plus si χ_g possède une racine non réelle λ, alors $\overline{\lambda}$ (conjugué de λ) est également racine de χ_g.

En effet, si λ est solut° de $P \in \mathbb{R}[X]$, alors :

$$P(\overline{\lambda}) = \overline{P(\lambda)} = \overline{0} = 0$$

$$\overline{a_1 + a_2\lambda + \dots + a_n\lambda^n} = a_1 + a_2\overline{\lambda} + \dots + a_n\overline{\lambda}^n \quad (\text{car les } (a_i)_i \subset \mathbb{R})$$

Comme le produit des valeurs propres de g est égal au déterminant (via la proposition : $\chi_g = X^n - \operatorname{tr}(g)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(g)$

$$\prod_{i=1}^{n}(X-\lambda_i) = X^n - (\lambda_1+\dots+\lambda_n)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \lambda_1 \times \dots \times \lambda_n$$

Remarque : Ici les $(\lambda_i)_i$ sont les val. propres de g. Elles peuvent être égales entre elles.

Et que $\det(g) = 1$, car $g \in SO(3)$. On a alors qu'il y a 3 possibilités pour les valeurs propres de g :

$(1, 1, 1)$; $(1, -1, -1)$; $(1, \lambda, \overline{\lambda})$ où $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

(Rq : $(-1, \lambda, \overline{\lambda})$ est impossible, car : $\lambda\overline{\lambda} = |\lambda|^2 > 0$.)

Dans tous les cas, 1 est valeur propre.

Soit donc $v \in \mathbb{R}^3$ un vect. propre de la val. propre 1 de g.

D'où : $g(v) = v$. Et on le choisit de norme $= 1$.

On pose alors $F = (\mathbb{R}v)^{\perp}$ muni de la base orthonormée $\{v', v''\}$

Scanné avec CamScanner

On a que F est stable par g, car :

$$\forall w \in F, \quad \langle N, g(w)\rangle = \langle {}^t g(N), w\rangle$$
$$= \langle g^{-1}(N), w\rangle \quad \big(N = g(N)\big)$$
$$= \langle N, w\rangle$$
$$= 0 \quad \big(w \in F^{\perp} = (N\mathbb{R})^{\perp}\big)$$

L'endomorphisme induit par g sur F, noté g_F est donc de déterminant 1 (i) et respecte la norme quadratique sur F (ii). C'est donc une rotation plane. Cela fournit une base orthonormée (N, N', N'') dans laquelle g s'écrit sous la forme R_θ et où la matrice de passage P est bien dans $O(3)$ (par construction).

En effet, (ii) on a : $\det(g) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathrm{Mat}(g_F) & \\ 0 & & & \end{pmatrix}_{N,N',N''} = 1 \times \det(g_F)$

$\det(g) = 1$

D'où $\det(g_F) = 1$.

(iii) g_F préserve la norme : car :

$$\forall x \in E, \quad \|g(x)\|_2 = \|x\|_2$$
$$\Rightarrow \forall x \in F, \quad \|g(x)\|_2 = \|g_F(x)\|_2 = \|x\|_2$$

Finalement, on a : qu'il existe $P \in O_3(\mathbb{R})$, tq :

$$\boxed{P\, \mathrm{Mat}_{\underline{e}}(g)\, P^{-1} = R_\theta .}$$

□

(2) Pour montrer que $SO(3)$ est connexe par arcs, on montre que chaque $g \in SO(3)$ est relié à l'identité $\mathrm{Id}_3 \in SO(3)$ par un chemin continue. On pose $P \in O_3(\mathbb{R})$ tq : $\mathrm{Mat}_{\underline{e}}(g) = P R_\theta P^{-1}$ et :

$$\gamma : [0,1] \longrightarrow SO(3)$$
$$t \longmapsto P R_{t\theta} P^{-1}$$

on a que γ est continue, car polynomiale en les coefficients de la matrice

$\gamma(0) = \mathrm{Id}_3$ et $\gamma(1) = \mathrm{Mat}_{\underline{e}}(g)$.

De plus, on a bien $\forall t \in [0,1]$, $\gamma(t) = P R_{t\theta} P^{-1} \in SO(3)$

car $\forall t \in [0,1]$, $\det(\gamma(t)) = \det(R_{t\theta}) = 1$

Scanné avec CamScanner

③ . . L'application φ est la composée de multiplication, inversion et trace.
φ est donc linéaire, et elle est donc continue par la dimension finie.

D'où : $\varphi(SO(3)) \subset \mathbb{R}$ est connexe (par ②)

C'est donc un intervalle (éventuellement réduit à un point)

D'une part, $\varphi(id) = tr(I_3) = 3$.

D'autre part, pour tout $g \in SO(3)$, le commutateur $ghg^{-1}h^{-1}$ est dans $SO(3)$. {car : $\det(ghg^{-1}h^{-1}) = 1$}

Donc par ①, il existe $\alpha \in [0, 2\pi]$, $\varphi(g) = 1 + 2\cos(\alpha) \leq 3$

D'où : $\varphi(SO(3)) = [a, 3]$ (où $-2 \leq a \leq 3$.)

④ Soit $h_0 \in Z(SO(3))$; D une droite glq de $\mathbb{R}^3$
et g une rotation non triviale d'axe D.

La droite D est ainsi le sous-esp. propre (de val. propre 1) pour g.

Donc h_0 qui commute avec g stabilise D.

Comme on a choisi D quelconque, il vient que h_0 stabilise toute droite.

Par ① les valeurs propres de h_0 sont de la forme :
$(1, 1, 1)$, $(1, -1, -1)$ ou $(1, i, \bar{i})$

Si par l'absurde, les valeurs propres de h_0 était $(1, -1, -1)$ ($(1, i, \bar{i})$ ou)

En notant v le vect. propre de 1, et v' le vect. propre de -1, on a : $h(v + v') = h(v) + h(v')$
$= v - v'$

D'où : $h((v+v')\mathbb{R}) \not\subset (v+v')\mathbb{R}$

C-à-d que la droite engendrée par $v + v'$ ne serait pas stabilisé par h.

Scanné avec CamScanner

(idem pour $(1,1,\bar{1})$)

Ainsi on a nécessairement que les valeurs propres de h_0 sont $(1,1,1)$.

D'où $h_0 = id$. (En effet, h_0 commute avec tout $g \in SO(3)$ donc h_0 est nécessairement diagonalisable)

Donc finalement $Z(SO(3)) = \{id\}$.

- On suppose donc par l'absurde que $a = 3$. On a alors pour tout $g \in SO(3)$:

$$tr(ghg^{-1}h^{-1}) = \varphi(g) = 3 \quad , \text{ or :}$$

$tr(ghg^{-1}h^{-1}) = tr\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}\right) = 1 + 2\cos(\theta) \Rightarrow \theta = 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow ghg^{-1}h^{-1} = id$

$\Leftrightarrow gh = hg$

$\Leftrightarrow h \in Z(SO(3))$

$\Leftrightarrow h = id$

$\rightarrow . \leftarrow$ absurde ! (on a supposé $h \neq id$).

$tr(PAP^{-1}) = tr((AP^{-1})P) = tr(A)$

⑤ : Par construction, il existe $\theta \in [0, \pi)$ tq $1 + 2\cos(\theta) = a$,

Comme la fonction cos est strictement décroissante sur $[0, \pi]$, on a que tout entier $n \in \mathbb{N}$ tq $0 < \frac{\pi}{n} < \theta$ vérifie $a < 1 + 2\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) < 3$

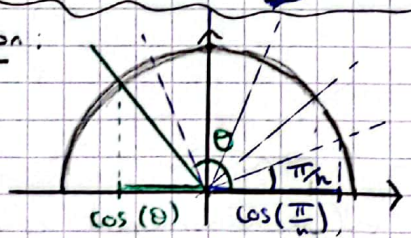
($a = 1 + 2\cos(\theta)$)

Par la ③ $\varphi(SO(3)) = [a, 3]$

D'où $\forall \lambda \in [a,3]$, $\exists g \in SO(3)$ tq $\varphi(g) = \lambda$

Donc il existe $g_n \in SO(3)$ tq $\varphi(g_n) = tr(g_n h g_n^{-1} h^{-1}) = 1 + 2\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$

Visualisation :



l'élément $h_n := g_n h g_n^{-1} h^{-1}$ est une rotation de trace $1 + 2\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$,

c'est une rotation d'angle $\frac{\pi}{n}$.

Il s'ensuit que h_n^n est une rotation d'angle $n\frac{\pi}{n} = \pi$.

c'est donc un retournement.

Scanné avec CamScanner

De plus, comme H est un sous-groupe distingué, $h_n \in H$ et donc $h_n^n \in H$.

En effet : $H \trianglelefteq SO(3)$ implique que :
$h_n := g_n h g_n^{-1} h^{-1} \in H$
($g_n h g_n^{-1} \in H$, $h^{-1} \in H$)

⑥ On peut donc trouver un retournement que l'on peut appeler $h \in H$.
Soit D l'axe de ce retournement.

On considère alors un retournement quelconque h' d'axe D'.
Soit $g \in SO(3)$ qui envoit D sur D' (bien penser que D et D' appartiennent à un plan commun)
↑ Lemme : $SO(3)$ agit transitivement sur S^2 (la sphère de $\mathbb{R}^3$)

Alors ghg^{-1} est encore une rotation d'angle π, qui se trouve encore aussi dans H, puisque H est distingué

Or le sous-esp. propre pour la valeur propre 1 de ghg^{-1} est $g(D)$

En effet : Pour $h \in SO(3)$ fixé, on pose $E_{1,h}$ l'espace propre associé à l'endom. h de val. propre 1.
on a : $\forall g \in SO(3),\ E_{1,ghg^{-1}} = g(E_{1,h})$

Preuve : $x \in E_{1,ghg^{-1}} \iff ghg^{-1}(x) = 1x$
$\iff h(g^{-1}(x)) = 1 g^{-1}(x)$
$\iff g^{-1}(x) \in E_{1,h}$
$\iff x \in g(E_{1,h})$

Donc ghg^{-1} est le retournement d'axe D' et ainsi $ghg^{-1} = h'$

On vient de montrer que H contenait tous les retournements, si bien que $H = SO(3)$ car les retournements engendrent $SO(3)$.

□.

Scanné avec CamScanner